4.2.4.Уравнение Френеля для лучевых скоростей.
Рассмотрим распространение энергии (лучей) в анизотропных средах. Пусть энергия плоской монохроматической волны распространяется в направлении, определяемом единичным вектором потока энергии $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$.

Уравнения:
$\vec{H} = [\vec{e} \times \vec{E}] n(\vec{e})$
$\vec{D} = -[\vec{e} \times \vec{H}] n(\vec{e})$
умножим векторно на $\vec{\tau}$
$[\vec{\tau} \times \vec{H}] = [\vec{\tau} \times [\vec{e} \times \vec{E}]] n(\vec{e})$
$[\vec{\tau} \times \vec{D}] = -[\vec{\tau} \times [\vec{e} \times \vec{H}]] n(\vec{e})$.
Получим :
$[\vec{\tau} \times \vec{H}] = -\vec{E}(\vec{\tau}\vec{e}) n(\vec{e})$
$[\vec{\tau} \times \vec{D}] = \vec{H}(\vec{\tau}\vec{e}) n(\vec{e})$, или
$[\vec{\tau} \times [\vec{\tau} \times \vec{D}]] = -\vec{E}(\vec{\tau}\vec{e}) n^2(\vec{e})$,
получим
$\vec{E} = \dfrac{\left(\vec{D} - \vec{\tau}\left(\vec{\tau}\vec{D}\right)\right)}{n^2\left(\vec{\tau}\vec{E}\right)^2}$.
Умножим уравнение на C^2, получим
$C^2\vec{E} = \dfrac{V_\phi^2\left(\vec{D} - \vec{\tau}\left(\vec{\tau}\vec{D}\right)\right)}{\left(\vec{\tau}\vec{E}\right)^2}$,
так как $V_\phi = V_л(\vec{e} \cdot \vec{\tau})$,
$C^2\vec{E} = V_л^2\left(\vec{D} - \vec{\tau}\left(\vec{\tau}\vec{D}\right)\right)$
Распишем уравнение по компонентам:

$$C^2 E_x - V_л^2 D_x = -\tau_x(\vec{\tau}\vec{D})$$

$$C^2 E_x - V_л^2 \varepsilon_{xx} E_x = -\tau_x(\vec{\tau}\vec{D})$$

или $E_x = \dfrac{-\tau_x(\vec{\tau}\vec{D})}{c^2 - V_л^2 \varepsilon_{xx}}$, учтем, что $c^2 / \varepsilon_{xx} = V_{xx}{}^2$, получим

$$\left.\begin{aligned} c^2E_x &= \frac{-\tau_x\left(\overline{\tau}\overline{D}\right)}{1-\dfrac{V^2{}_л}{V^2{}_{xx}}} \\ c^2E_y &= -\frac{\tau_y\left(\overline{\tau}\overline{D}\right)}{1-\dfrac{V^2{}_л}{V^2{}_{yy}}} \\ c^2E_z &= -\frac{\tau_z\left(\overline{\tau}\overline{D}\right)}{1-\dfrac{V^2{}_л}{V^2{}_{zz}}} \end{aligned}\right\} \quad умножим \quad на \quad \left\{\begin{aligned} &\tau_x \\ &\tau_y \\ &\tau_z \end{aligned}\right. \qquad +$$

Получаем уравнение Френеля для лучевых скоростей:

$$\frac{\tau^2{}_x}{\dfrac{1}{V^2{}_л}-\dfrac{1}{V^2{}_{xx}}}+\frac{\tau^2{}_y}{\dfrac{1}{V^2{}_л}-\dfrac{1}{V^2{}_{yy}}}+\frac{\tau^2{}_z}{\dfrac{1}{V^2{}_л}-\dfrac{1}{V^2{}_{zz}}}=0$$

или

$$\frac{\tau^2{}_xV^2{}_{xx}}{V^2{}_л-V^2{}_{xx}}+\frac{\tau^2{}_yV^2{}_{yy}}{V^2{}_л-V^2{}_{yy}}+\frac{\tau^2{}_zV^2{}_{zz}}{V^2{}_л-V^2{}_{zz}}=0$$

Можно показать, что $E' \perp E''$.

В каждом направлении распространяются 2 луча со скоростями $V'_л$ и $V''_л$ с $E' \perp E''$

4.2.5 **Оптические свойства одноосных кристаллов.**

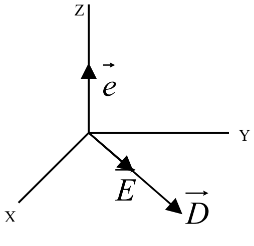
В зависимости от структуры кристаллических сред и симметрии тензора диэлектрической проницаемости кристаллы можно разделить на три группы: кубические, одноосные, двуосные.

В кубических кристаллах $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}$, они ведут себя как изотропные среды.

В одноосных кристаллах $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{II}$, ось кристалла совпадает с осью (o, Z)

Рассмотрим свойства одноосных кристаллов.

Пусть $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=n^2{}_0$; $\varepsilon_{zz}=n^2{}_l$



Рассмотрим следующие случаи:

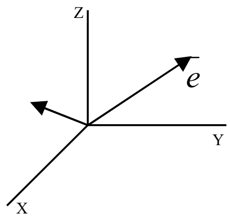
1) $e \,//\, Z$

$$D_x=\varepsilon_{xx}E_x=n^2{}_0E_x$$
$$D_y=\varepsilon_{yy}E_{yy}=n^2{}_0E_y$$
$$\vec{D}\,\|\,\vec{E};$$

$$D = \sqrt{D^2{}_x + D^2{}_y} = n^2{}_0 E$$

2)Рассмотрим произвольное направление

а) $\overline{D} \perp (\overline{e}Z)$ вектор $\overline{D}$ в этом случае лежит в плоскости $(\overline{x}\overline{y})$ всегда



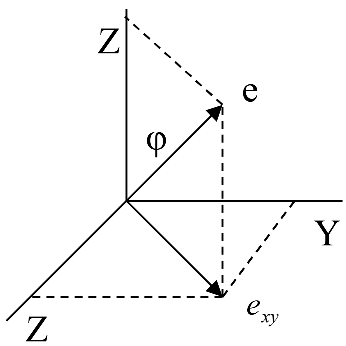
$$D_x = \varepsilon_{xx} E_x = n^2{}_0 E_x$$

$$D_y = \varepsilon_{yy} E_y = n^2{}_0 E_y$$

$$D = n^2{}_0 E$$

E – также $\in (x, y)$

$E_z = 0$, т. Е. и в этом случае $\vec{D} \parallel \vec{E}$



Уравнение Френеля для одноосного кристалла.

Рассмотрим более подробно случай одноосного кристалла.

Перепишем уравнение Френеля в следующем виде:

$$e_x^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{yy}}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\right)+e_y^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{zz}}\right)+$$

$$+e_z^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{xx}}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_{yy}}\right)=0$$

Сделаем преобразования, учтя, что $e^2{}_x + e^2{}_y + e^2{}_z = 1$, введем $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{II}$, $e^2{}_x + e^2{}_y = \sin^2\varphi$, $e^2{}_z = \cos^2\varphi$

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_\perp}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{e_x^2+e_y^2}{\varepsilon_{II}}-\frac{e_z^2}{\varepsilon_\perp}\right)=0$$

Получим $\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_\perp}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon_{II}}-\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon_\perp}\right)=0$

Уравнение распадается на два

1. $\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_\perp}\right)=0$

2. $\frac{1}{n^2}=\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon_{II}}+\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon_\perp}$

Уравнение 1 описывает распространение сферической волны для которой показатель преломление не зависит от направления. Такая волна называется обыкновенной. Для волны описываемой уравнением 2 показатель преломления зависит от направления распространения волны, эта волна называется необыкновенной.

Уравнение 2 – уравнение эллипсоида вращения.

При распространении необыкновенной волны:

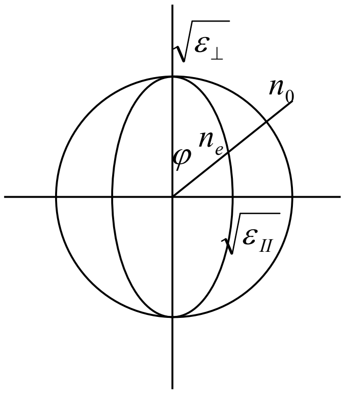
а) вдоль оси

$\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$

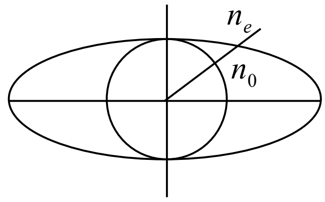
Скорость совпадает со скоростью распространения обычной волны.

б) $\perp$ оси

$\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$, $n = \sqrt{\varepsilon_{II}}$

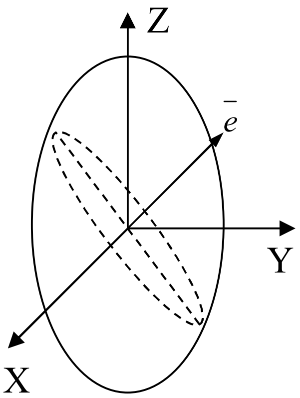


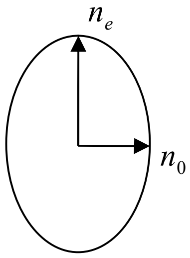
Отрицательный кристалл



Положительный кристалл

Можно построить оптическую индикатрису.





Для нахождения n_0 и n_e строится сечение $\perp \bar{e}$, тогда в этом сечении главные оси дадут значения n_0 и n_e, а их направления, направления D' и D''

Уравнение для лучевых скоростей для одноосного кристалла будет иметь вид $(OO' \perp Z)$

$$\left(\tau_x^2 + \tau_y^2\right)\left(\frac{1}{V_r^2} - \frac{1}{V_\perp^2}\right)\left(\frac{1}{V_r^2} - \frac{1}{V_{II}^2}\right) + \tau_z^2\left(\frac{1}{V_r^2} - \frac{1}{V_\perp^2}\right) = 0$$

Получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} 1 & \dfrac{1}{V_{r_0}^2} - \dfrac{1}{V_\perp^2} = 0 \\ 2 & \dfrac{1}{V_{r_e}^2} = \dfrac{\sin^2\varphi}{V_{II}^2} + \dfrac{\cos^2\varphi}{V_\perp^2} \end{cases}$$

где V_{II} и $V_\perp$ - скорости компонент поляризованных в главной плоскости и перпендикулярно главной плоскости соответственно.

В каждом направлении распространяются две волны с лучевыми скоростями V_v.

Волна, определяемая уравнением 1, имеет

$V_{r_0} = V_{\perp}$ независящую от направления

$V_{r_0} = V_{\phi} = V_{\perp}$ (обыкновенная волна)

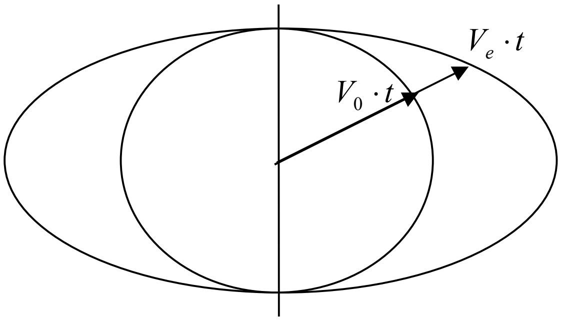
Волна определяемая уравнением 2 имеет скорость зависящую от направления

В случае $\sin\varphi = 0$;

$V_{r_e} = V_{r_0} = V_{\perp}$

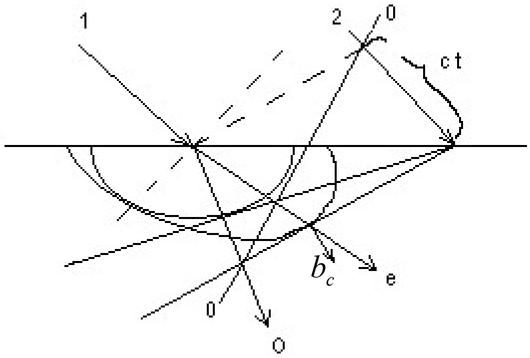
При распространении вдоль оптической оси, скорости обеих волн равны.

Если внутри анизотропной среды расположен источник – точечный, то волны будут распространяться следующим образом.



4.2.6. Двойное лучепреломление, построения Гюйгенса для анизотропных сред.

Рассмотрим явление двойного лучепреломления. Пусть свет падает на поверхность анизотропного кристалла с осью ОО', ориентированной произвольным образом.

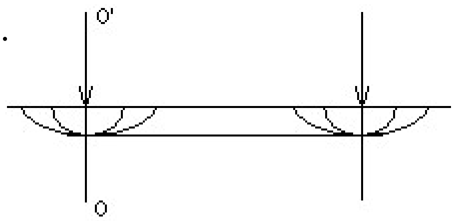


За время $t = \frac{\Delta}{c}$; волна 1 распространится по кристаллу. Построим эллипсоиды (лучевые)!! для такого случая. Направление луча определяется на точку касания. Эти направление не совпадают между собой. Направления распространения фазы определяются направлением нормали к волновому фронту. Волновой – касательная к лучевым поверхностям.

Нормаль к волновому фронту и направление луча совпадают только для обыкновенной волны.

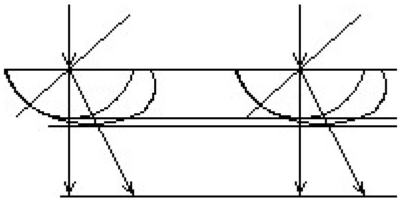
Рассмотрим ряд случаев.

1.



Свет падает вдоль оси перпендикулярной поверхности кристалла, в случае е и о идут по одному направлению с одинаковыми скоростями.

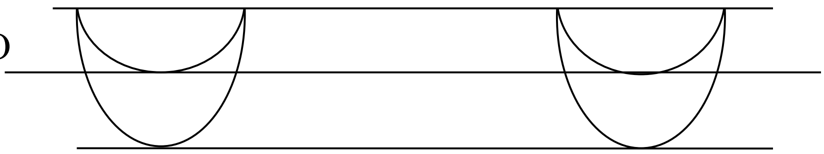
2. Нормальное падение света, но ось расположена под углом к поверхности кристалла.



Замечание: Закон Снелиуса выполним только для фазовой поверхности, т. е. волнового фронта. В данном случае волновой фронт движется не преломляясь, тогда как лучи испытывают двойное лучепреломление.

Если вращать кристалл, то необыкновенный луч будет вращаться вокруг обыкновенного.

3.

O  O^I

Падение света перпендикулярно оптической оси, лежащей параллельно поверхности кристалла. Две волны каждая из которых движется со скоростями:

$$V_0 = \frac{c}{n_0};\ V_e = \frac{c}{n_e}$$

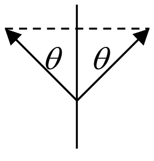
Эти волны поляризованы в двух взаимно перпендикулярных направлениях, поэтому в зависимости от толщины кристалла поляризация будет меняться. Время задержки одной волны относительно другой. Поляризация эллиптическая.

$$\Delta t = \frac{Z}{V_0} - \frac{Z}{V_e} = Z\frac{(n_0 - n_e)}{c}$$

Разность хода $\Delta = Z(n_0 - n_e)$

Разность фаз $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} Z(n_0 - n_e)$

В случае $\delta = \pi m$; m=1,3,…



Сохраняется линейная поляризация, но направление поляризации симметрично исходному.

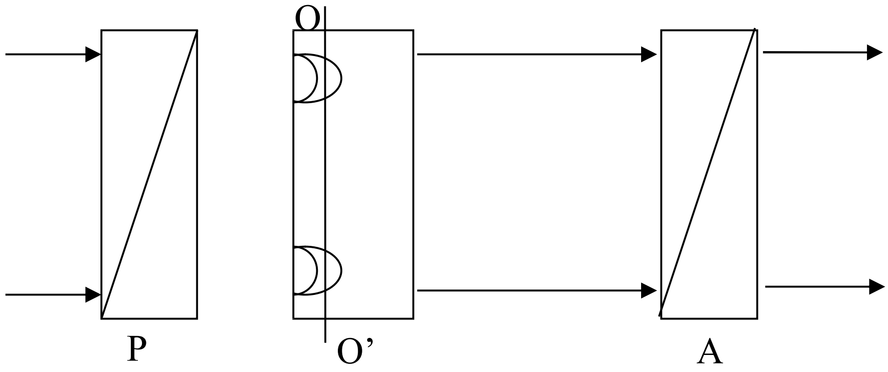
Б) $\delta = 2\pi m$; m=0,1,2,3,…

Состояние поляризации не меняется.

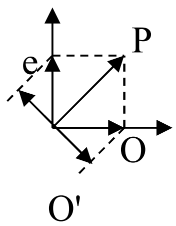
В) $\delta = \frac{\pi}{2} + \pi m$; m=0,1,2,3,…

На выходе будут волны круговой поляризации.

Обычно явления наблюдаются при падении света на кристалл по схеме 3 рассматривается в следующей оптической схеме:



Если на выходе поместить еще один поляроид, то будут наблюдать окраски кристаллических пластинок.



в случае параллельных поляризаторов:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} Z(n_e - n_0)$$

в случае скрещенного

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} Z(n_e - n_0) + \pi$$

Дальше рассматривается по классическому рассмотрению интерференции. Условие максимума и минимума приводит к окраске пластинок.